

9 Rytmus, pohyb, periodicitá, nejmenší společný násobek dvou přirozených čísel

Darina Jirotková

Tato kazuistika se věnuje výuce matematiky na 1. stupni základní školy Hejného metodou vyučování matematice (dále H-metodou). Výuku vedla stejná vyučující ve stejné třídě jako v kazuistice Vondrové (*Jak najít pravidlo pro umístění desetinné čárky při násobení desetinných čísel*), takže srovnání těchto dvou kazuistik může být užitečné k hlubšímu porozumění strategiím při tvorbě učebního prostředí v daném pojetí výuky. Výuka v obou kazuistikách se odehrává s asi ročním odstupem.

Předloženou kazuistiku lze rozložit do tří rovin. První rovinou, která je kompletně popsána v podkapitole *Anotace*, jsou informace o učitelce a třídě, které z videa nelze bezprostředně vyčíst.

Druhá rovina je konceptová analýza aktivity „Tleskni, dupni“, která ve vyučovací hodině matematiky zachycené na videu nese matematický obsah. Uvedeme zde i předchozí související zkušenosti žáků, které ovlivňují tvorbu jejich prekonceptů matematických pojmů, k jejichž budování aktivita přispívá.

Třetí rovinou je analýza tvorby učebního prostředí. Budou zde zdůrazněny principy genetického konstruktivismu zpracovaného prof. Kvaszem (Kvasz, 2016). Zejména to bude princip epistemické blízkosti, tzn. vznik matematických konceptů zpředmětněním motorických, mentálních, symbolických a ikonických aktivit, a Princip instrumentální ukotvenosti, který hovoří o důležitosti rozvoje empirické zkušenosti a jejího přerodu v instrumentální zkušenost, která je pro matematiku zásadní.

Videonahrávka vyučovací hodiny matematiky, se kterou zde pracujeme a ze které čerpáme didaktické jevy, které podrobně rozebíráme a komentujeme, je dostupná na youtube.¹ Z ní jsou pořízeny i obrázky zde v článku.²

1 <https://www.youtube.com/watch?v=7qMozPbcCWQ>

2 Nahrávání výuky proběhlo v rámci projektu *Pomáháme školám k úspěchu* podpořeného nadací Renáty a Petra Kellnerových, do kterého byl prof. Hejný a jeho pracovní tým zapojen. Paní učitelka J. Michnová měla generální souhlas od rodičů žáků třídy s nahráváním práce třídy a s použitím nahrávek k odborným a popularizačním účelům.

9.1 Anotace

Natáčení výuky matematiky ve 4. ročníku ZŠ proběhlo v polovině května r. 2013. Učitelka Jitka vedla danou třídu od 3. ročníku a byla její současnou třídní učitelkou. Žáci dané třídy byli vedeni v matematice H-metodou od 1. ročníku.

V den natáčení daného videa se nahrávaly celkem 4 vyučovací hodiny za sebou a tato hodina byla čtvrtá. To je důležitá informace, kterou je třeba brát v úvahu při posuzování pracovního nasazení žáků i učitelky. Nahrávalo se na dvě kamery a uvedené video je sestříhané ze dvou nahrávek. Žáci byli zvyklí na přítomnost kamery i přítomnost cizích lidí z mnoha realizovaných otevřených hodin jak pro učitele z praxe, tak i pro studenty učitelství, tedy můžeme předpokládat, že samotné natáčení ani přítomnost kameramanů neovlivnilo průběh hodiny.

K videozáznamu je dostupný i komentář vyučující, který také využijeme.³

Žáci v této třídě běžně pracují se stíracími tabulkami. Výhodou této pomůcky pro žáky je, že tak snadno řeší úlohy strategií pokus-omyl, neobávají se udělat chybu, nesprávné řešení mohou ihned opravit nebo smazat, grafická úprava nehraje roli. Výhodou pro učitele je, že dostává rychlou informaci o řešení více žáků či celé třídy téměř najednou. Učitel tak také získá přehled i o shodných a rozdílných postupech žáků při řešení stejné úlohy a může vybrat vhodné řešitelské strategie k prezentaci. Tím nabídne jednak celé třídě možnost porovnání odlišných nebo i hodně blízkých postupů, některým žákům možnost svou strategii zdokonalit a jiným žákům, kteří se v dané úloze ještě neorientovali, výběr postupu blízkého jejich způsobu uvažování. Zkušený učitel má tak možnost průběžně diagnostikovat aktuální úroveň žáků a řídit jejich další kognitivní kroky prostřednictvím přiměřených úloh (Hejný, 2014, s. 44), tzn. úloh tak náročných, aby na ně dosáhli, ale museli přitom vynaložit jisté intelektuální úsilí.

Nevýhodou používání stírací tabulky však je, že žák i učitel ztrácí evidenci o provedených krocích řešitelského procesu. Při odhalování nějakých vazeb a při práci s větším počtem pokusů je to pro žáky celkem významná nevýhoda. Rovněž tak je to nevýhoda pro učitele, který se zajímá spíše o to, co žákovi probíhá při řešení hlavou, a nikoliv o pouhý výsledek. Vizí do budoucna může být elektronická tabulka charakteru tabletu s programem, který uchovává všechny smazané kroky řešení.

9.1.1 Kontext výukové situace – téma, cíl

Tématem první části hodiny, které se budeme věnovat, je aktivita „Tleskni, dupni“. Žáci se s touto aktivitou seznamují již od 1. ročníku a vnímají ji spíše jako hru. Dále však vysvětlíme, že z didaktického hlediska se jedná o závažný metodický moment – o způsob tvorby tzv. prostředí pro nácvik práce s nástroji reprezentace (matematického) obsahu. Všichni žáci třídy jsou rozděleni do dvou skupin na tleskače a dupače. Učitel k tomu sdělí dvě čísla, například „tleskni dvě, dupni tři“, a pak začne odříkávat rytmicky číselnou řadu jedna, dvě... Tleskači na každou druhou tlesknou a dupači na každou třetí dupnou. Učitel si pro sebe zvolí číslo, do kterého bude řadu odříkávat, nebo po domluvě se žáky skončí odříkávání, jakmile to někdo poplete. Pak vždy následují otázky: Kolikrát se tlesklo? Kolikrát se duplo? Kolikrát se tlesklo a duplo zároveň?

Z hlediska matematiky jde o budování konceptů z oblasti dělitelnosti – násobek a dělitel, společný násobek a nejmenší společný násobek dvou přirozených čísel, operace dělení se zbytkem.

Uchopení úlohy z hlediska didaktiky matematiky

Matematicky formulované úlohy *Kolikrát se tlesklo? Kolikrát se duplo? Kolikrát se tlesklo duplo zároveň?* by zněly: *Kolik násobků čísla a , případně čísla b , případně společných násobků čísel a a b je v číselné řadě od 1 do k ?*

Řešení série úloh „Tleskni a , dupni b “ tedy směřuje ke dvěma hlubokým objevům:⁴

1. Ze znalosti posledního vysloveného čísla k a čísla a (resp. b) mohou operací dělení získat počet tlesknutí, resp. počet dupnutí. Tento objev je komplikován skutečností, že dělení může vyjít se zbytkem. Ten se při výpočtu neuvažuje.
2. Chci-li zjistit, kolikrát se současně tlesklo a duplo, potřebuji nejdříve zjistit, při jakém čísle k tomu došlo poprvé, a tímto číslem pak vydělit číslo k . Ani zde se zbytek neuvažuje.

Druhý z objevů dává žákovi zkušenost s důležitým pojmem aritmetiky, s pojmem nejmenší společný násobek dvou přirozených čísel a , b , který značíme $n(a, b)$.

⁴ Termínem *hluboká matematická myšlenka* se podrobně zabýval polský badatel, matematik a didaktik Z. Semadeni (2002, 2007). Zjednodušeně řečeno, termínem *hluboká myšlenka* autor uchopuje ty poznávací procesy v matematice, které se odehrávají v hlubších kognitivních vrstvách, než je dovednost s pojmem zacházet. V teorii vyučování zaměřeného na budování schémat se tyto procesy zkoumají pomocí pojmu schéma.

Na konci 4. ročníku mají žáci již bohaté zkušenosti s dělením jako inverzní operací k násobení. Ziskávají je především prostřednictvím některé z manipulativních úloh dvou typů:

- dělení na části (rozdělování), např. *Rozděl 36 bonbonů mezi 3 děti. Kolik bonbonů dostane každé dítě?*
- dělení po částech (podělování), např. *Rozděl 36 bonbonů mezi děti tak, že každé dostane 3 kusy. Kolik dětí podělíš?*

Mentální schéma, které se u těchto tří situací (dupni na každou třetí, rozděl na tři části a rozděl po třech) utváří ve vědomí žáka, je multiplikativní triáda⁵ typu (3, 12, 36), kdy ze znalosti kterýchkoli dvou z těchto čísel je možné násobením nebo dělením získat číslo třetí. K této strukturální úrovni porozumění multiplikativní triádě se žák dostává postupnou desémantizací popsanych sémantických situací.

Dalším prostředím, které je blízké prostředí „Tleskni, dupni“, je například Akcentované krokování, kdy žák krokuje a u každého třetího (nebo čtvrtého) kroku navíc tleskne, nebo udělá jiný důrazný pohyb.

Z didaktického hlediska hlavní rozdíly mezi situací „Tleskni, dupni“ a situací manipulativního dělení na části (rozdělování) nebo dělení po částech (podělování) jsou dva:

- fyziologický – u první situace žák zapojuje ruce nebo nohy; u druhé jen prsty,
- paměťový – u první situace je celý proces pomíjivý, po jeho realizaci mizí evidence o něm, a když má pak žák o procesu diskutovat a řešit úlohy, musí jej držet v krátkodobé paměti, nebo si dělat individuální evidenci; u druhé jsou objekty, se kterými žák manipuluje, stále všechny přítomny žakovým smyslům a na krátkodobou paměť žáka nejsou kladeny žádné nároky.

Zkušenosti ukazují, že právě součinnost obou sémantických přístupů umožňuje žákům budovat kvalitní schéma multiplikativní triády. Z toho, že někteří žáci více vítají úlohy manipulativní a jiní zase úlohy pohybové, je vidět, že účinná je ta edukační strategie, která využívá prostředí zajišťujících tok zkušeností žáků různými percepčními kanály. To je ale známý fakt.

⁵ Trojici čísel (a , b , c) nazýváme multiplikativní triádou, jestliže platí vztah $a \cdot b = c$. Jestliže místo násobení použijeme sčítání, hovoříme o aditivní triádě.

V první části aktivity „Tleskni, dupni“ žáci získávají motorické zkušenosti. Ve druhé části aktivity žáci hledají nástroj, instrument, jak tyto motorické zkušenosti uchopit. Jejich motorické zkušenosti se tedy přetvářejí na zkušenosti instrumentální a ty jim umožní artikulovat řešení pomocí matematických symbolů.

9.1.2 Didaktické cíle

Aktivita „Tleskni, dupni“ sleduje několik didaktických cílů.

1. *Žáci synchronizují dva rytmy.* První rytmus je učitelčino odpočítávání řady čísel. Z hlediska percepce žáka je to rytmus především akustický. Když učitel doprovodí odpočítávání například pohybem ruky jako metro- nom a žák jej sleduje, je percepce také vizuální. Rytmus je procesuální, což znamená, že se odehrává v čase, a je pomíjivý, což znamená, že po ode- znění realizace zanikne a nezůstane po něm evidence. Nositelem rytmu je číselná řada.

Tento rytmus žáci synchronizují s rytmem, jehož původci jsou oni. Je to jejich tleskání, či dupání. To je z hlediska žáka rytmus kinestetický. Můžeme též mluvit o jeho periodě – rytmus tleskání má periodu 2, rytmus dupání periodu 3. Dále řekneme, že rytmus s periodou 2 je typu AB, když se střídají dva prvky – tlesknutí, pauza. Rytmus s periodou 3 je v našem případě typu ABB – dupnutí, pauza, pauza. Oba rytmy jsou také procesuální. Nositelem rytmu je pohyb žáka doprovázený akusticky.⁶ Vzhledem k tomu, že žáci synchronizují rytmus, který realizuje učitel, s rytmem, který realizují oni, je důležité, aby učitel řadu čísel odříkával dobře v ryt- mu. Žákova realizace rytmu pohybem svého těla je cenná zkušenost, na které lze budovat další abstraktní poznatky. Navíc tomu, co žák prožije vlastním tělem, pak lépe rozumí a lépe si to zapamatuje, což dokládá svými výzkumy například polská psycholožka Gruszczyk-Kolczyńska (2012).

Schopnost synchronizovat rytmy uplatňují děti například při zjišťování počtu prv- ků nějaké množiny. Dítě ukazuje na jednotlivé prvky popořadě (kinestetický ryt- mus), na každý právě jednou, žádný nesmí vynechat, a přitom odříkává říkanku

6 Jan Slávik (osobní konzultace) v této souvislosti připomíná dávnou antickou (Pythagorejskou) ideu vzájemné korespondence mezi ma- tematikou a hudbou, tj. i mezi dvěma základními způsoby poznávání: *noéta* (pojmového) a *aisthéta* (obrazového). Eco (2005, s. 82) k ní stručně podotýká: „V pythagorovské tradici (jejíž pojetí přenesl do středověku Boëthius) jsou lidská duše a tělo podřízeny stejným zákonům jako hudba a s těmiž proporcemi se setkáváme také v kosmické harmonii, takže mikro- i makrokosmos (svět, v němž žijeme, a celý vesmír) jsou propojeny jediným pravidlem, které je zároveň matematické i estetické.“ Z didaktického hlediska lze funkčnost tohoto spojení vysvětlit s oporou o výklad L. Kvaszem formulovaného principu *jednoty matematiky*: „Jednota matematiky sa prejavuje nečaka- nými a překvapivými súvislosťami, ktoré sa objavujú medzi zdánlivo nesúvisiacimi, rôznorodými prvkami.“ Pritom ovšem platí, že, „nie každý nástroj je rovnako efektívny. Preto je po určitom čase potrebné, aby trieda ‚skonvergovala‘ k viac-menej štandardnej symbolike a terminológii“ (Kvasz, 2016, s.25).

řady čísel jedna, dvě, tři, ... (akustický rytmus). Poslední slovo, které řekne, označuje zjišťovaný počet. Často děti, zejména v předškolním i raně školním věku, tento synchron nezvládají. Podle naší zkušenosti bývá kinestetický rytmus pomalejší a v důsledku toho děti chybují. Můžeme to pozorovat například při hře „Člověče nezlob se“, kdy dítě pohybuje panáčkem v jiném rytmu, než odpočítává řadu čísel. Nebo také na otázku: „Kolik ti je let?“ dítě odpoví „tři“ a začne odpočítávat „jedna, dvě, tři“ a přitom o trochu pomaleji ukazuje na prstech postupně palec, ukazováček a pak prsteníček.

Při práci v prostředí Krokování v 1. ročníku v H-metodě je na dovednosti synchronizovat rytmus krokování, tleskání, říkání řady čísel založeno budování představ o čísle. Například když žák dělá 5 kroků, přitom sám i celá třída postupně pětkrát tleskne a přitom odříkávají říkanku jedna, dva, ..., pět, realizuje se několik modelů čísla 5 současně – akustický, kinestetický, vizuální, mluvený. Všechny jsou procesuální a pomíjivé. Tím, že všechny modely probíhají synchronně, se vlastně „říká“, že pět kroků, pět tlesknutí, pět slov „je jedno a totéž“. Těchto několik konkrétních modelů čísla 5, které se v teorii generických modelů (Hejný, 2014) nazývají izolované modely budoucího abstraktního poznatku „číslo 5“, tedy tvoří díky synchronu komunitu objektů, které mají něco společného. Je to „5 něčeho“. Nalezením té společné charakteristiky se posouvá poznání čísla 5 z úrovně izolovaných modelů na úroveň generického modelu. Generickým modelem se může stát například i jeden z těch izolovaných modelů, který má pak zástupnou roli a reprezentuje několik izolovaných modelů. Pro některého žáka tím generickým modelem je pět tlesknutí, pro jiného třeba postupné ukazování pěti prstů. Tedy synchronizace rytmů přispívá k tvorbě nějakého generického modelu jistého čísla tím, že propojí několik jeho izolovaných modelů. Zde začíná vznikat v mysli žáků schéma konceptu číslo.

Později žáci naleznou instrument, kterým je možné všechny tyto modely vizuálně reprezentovat, například pět šipek, pět čárek. Jakmile je pět čárek nakresleno, jedná se již o model vizuální, statický. Obvykle pět čárek (kuliček, šipek) bývá žáky vnímáno na úrovni generického modelu čísla 5, který zastupuje jistou skupinu izolovaných modelů čísla 5 – pět jablek, pět autíček, ..., i pět prstů – modelů statických, vizuálních a případně i haptických. Propojením těchto dvou generických modelů znakem 5 dochází ke kognitivnímu zdvihu a k vytvoření abstraktního poznatku čísla 5.

Nácviku rytmů z různých hledisek (perioda, počet různých prvků v periodě, charakter prvků, percepce, polarita a komplementarita procesu a konceptu) věnuje koncepce H-metody velkou pozornost od prvních školních dní. Hru „Tleskni,

dupni“ v nějaké jednoduché verzi a na úrovni prožitků hrají žáci i v předškolním věku. Obvykle při ní pracuje celá třída, a tak žák, kterému rytmus dělá problémy, má možnost se chytat ostatních a napodobovat je. To je také způsob, jak kinestetický rytmus s dětmi nacvičovat – dítě ho vykonává společně s někým, s učitelem nebo se šikovnějším spolužákem nebo skupinou.

2. *Žáci v činnosti získávají zkušenosti s řadou násobků.* Nácvik řady násobků je při zavádění násobilky, tedy ve 2. a 3. ročníku, v tradičně vedených třídách běžný. Obvykle žáci odříkávají řadu násobků, např. 0, 3, 6, 9, ..., 30. Žáci buď ta čísla již znají a jen si je vybavují z dlouhodobé paměti, nebo, a to velmi často, opakovaně přičítají jisté číslo, zde 3. Nebo také využívají rytmu, v duchu si odříkávají číselnou řadu a pomocí ukazování na prstech každé třetí číslo řeknou nahlas. Při hře „Tleskni, dupni“ děti získávají v herní situaci pohybovým prožitkem zkušenosti s řadou násobků dříve než až při zavádění násobilky. Jde o poznání řady násobků v činnosti.⁷
3. *Žáci v činnosti poznávají společné násobky dvou čísel.* V našem případě žáci poznávají, že čísla 6, 12, 18, ... jsou násobky jak čísla 2, tak čísla 3.
4. *Žáci poznávají společného dělitele dvou soudělných čísel.* O tom se zmíníme až závěrem při nastínění možné gradace úloh této hry.
5. *Žáci hledají a formulují řešitelskou strategii sady úloh z daného prostředí.*

9.1.3 Didaktické uchopení obsahu – činnosti učitele a žáků

Nyní již budeme sledovat videozáznam hodiny a zastavovat se u vybraných didaktických situací.

Zadání úlohy a motivační síla výukového prostředí

[0:16] Učitelka se ujišťuje, že žáci mají připravené (mazací) destičky, a oznamuje aktivitu „Tleskni, dupni“. Reakce dětí je bouřlivě pozitivní. Někdo zvedne ruce nad hlavu, žák v první lavici, Martin, dokonce vyskočí z lavice.

7 Jan Slavík (osobní konzultace) dodává: Obsahové propojení mezi tělesnou aktivitou a jejím intelektuálním operačním ekvivalentem lze vystihnout termínem *konceptová integrace* jednání, komunikace a myšlení (*conceptual integration*, resp. *blending*, podle Fauconniera a Turnera, 2002; viz Slavík, Chrz, & Štech, et al., 2013, s. 188–196). Nezvládnutí principu integrace se v metodice 3A pokládá za projev tzv. *didaktických formalismů*.



Obrázek 9.1. Radost žáků.

Učitelka jen oznámila název následující činnosti, nemusela nic vysvětlovat a žáci ihned věděli, o co půjde.

Ve výuce H-metodou žáci poznávají matematiku prostřednictvím řešení úloh v různých kontextech, v různých matematických prostředích.⁸ Většina výukových prostředí ve smyslu vymezení podle Wittmanna (2001⁹) a upřesnění Hejným (2014¹⁰), která byla rozpracována pro výuku matematiky Hejným a kol. (2007–2011¹¹), se zavádí od 1. nebo 2. ročníku a pracuje se v nich až do 5. ročníku a s většinou i dále na 2. st. ZŠ. Žáci v mnoha různých prostředích pracují opakovaně a často, a tedy je dobře znají. Při řešení úlohy zadané ve známém prostředí se tak žáci mohou soustředit na matematickou podstatu úlohy a neztrácí energii na pochopení zadání úlohy.

Jak můžeme vysvětlit, že po třech hodinách matematiky se ještě děti těší na další matematiku?

Těšení se žáků na hru „Tleskni, dupni“ je indikátorem jejich vnitřní motivace k práci, k řešení úloh. Bouřlivá pozitivní reakce svědčí o značné motivační síle tohoto prostředí. Zdrojem motivace jsou nejspíše předchozí zkušenosti žáka provázené radostným pocitem intelektuálního růstu. Navíc předchozí tři hodiny probíhaly úplně jiné činnosti – řešení slovních úloh a 3D geometrie. Časté střídání prostředí v H-metodě znamená i střídání činností a forem práce a nedochází ani po delší době k únavě stereotypem.

8 Počet prostředí rozpracovaných v H-metodě je větší než 20 a stále se pracuje na nových.

9 E. Wittmann zavedl termín *substantial learning environment*, u něhož požaduje, aby úlohy v něm umožnily odhalit žákům důležité matematické pojmy a vztahy.

10 Hejný (2014, s. 13) vymezuje pojem didaktické matematické prostředí takto: „Soubor vzájemně propojených pojmů, vztahů, procesů a situací, který dovoluje tvořit úlohy: (a) umožňující žákům odhalovat hluboké matematické myšlenky, (b) obdařené silným motivačním potenciálem, (c) přiměřené žákům jak 1., tak 2. stupně, (d) s nastavitelnou obtížností.“

11 Řada učebnic matematiky pro 1.–5. ročník autorů Hejný a kol., vydaných v nakladatelství Fraus, 2007–2011.

Organizace aktivity a jev solidarity třídy

Po oznámení hry učitelka rozdělí žáky třídy na tleskače a dupače: „Blíže u okna tleskači (ukáže na první řadu u okna), dupači (ukáže na sousední řadu)...“, až rozdělí celou třídu do šesti skupin, tři řady tleskačů a tři řady dupačů.

Všimněme si, jak si učitelka počíná ekonomicky. K organizaci aktivity jí stačilo 9 slov. Jaký dopad na žáky má úspornost instrukcí a organizace aktivity učitelky?

Učitelka ekonomickým a rázným řízením organizace dává hodině spád, energetizuje třídu, děj se řítí vpřed a žáci nemají čas na vlastní odstředivé myšlenky.

Poslední slovo dupači učitelka důrazněji zopakuje, neboť žák Tonda dal najevo svou nespokojenost (0:35).

Tonda si zřejmě přál být tleskačem. Učitelka nepovažuje projev nelibosti za tak závažný, aby se mu věnovala. Dala tím najevo, že na organizaci aktivity více času nedá.

Dále vidíme (0:37), že spolužák vedle něj, Honza, na kterého vyšel tleskač, nabídnul Tondovi výměnu a hned si své pozice vyměnili.

Pokusme se spekulovat, proč to Honza udělal: Honza chce pomoci kamarádovi a nechce, aby došlo k průtahům. Solidarita třídy šetří čas na práci, každý chce jít dopředu. V záběru 2:30 je vidět, že po odehrání hry se chlapci na vlastní řešení úloh vrátili zase na svá místa.

Synchronizace rytměů

Učitelka rytmicky odpočítává řadu čísel a rukou zřetelně provádí pohyb jako metronom (obr. 9.2).



Obrázek 9.2. Metronom.

Z hlediska percepce žáka jde o rytmus akustický (slova) a také vizuální (pohyb ruky učitelky), je procesuální a pomíjivý.

Při hře „Tleskni, dupni“ nastává kromě výše uvedeného ještě jedna obtíž, která vyžaduje od žáků značné soustředění. Dva žáci vedle sebe realizují dva různé kinestetické rytmy – tleskání, nebo dupání. Avšak například tleskání je z hlediska percepce žáka-dupače rytmus akustický. Tedy dupač se nesmí nechat strhnout akustickým, případně vizuálním rytmem tleskače a musí se soustředit na akustický a/nebo vizuální rytmus, který realizuje učitelka. Jistě to není zcela triviální ani pro žáky 4. ročníku, jak vidíme např. u žáka Tondy, který si vyměnil pozici se spolužákem Honzou, v popředí v záběru 1:21–1:26. Ten, ačkoliv je tleskač a není rušen nikým před sebou, na číslo 9 dupnul. To mu jeho rytmus tleskání narušilo tak, že pak tlesknul na číslo 11 a pak na další dvě čísla, která ještě v záběru kamery jsou, se nemohl chytit.

Tondovy potíže jsou potížemi hráče v symfonickém orchestru. Ten také musí přesně uvádět do souladu akustický a kinestetický rytmus, přičemž oba se mohou značně lišit. Z pohledu konceptové a sémantické analýzy v 3A¹² jde o synchronizaci a integraci mezi „předvedením“ (exemplifikací), „označením“ (denotací) a „vyjádřením“ (expresí).

Na dalším záběru (1:42–1:49) je Lukáš, který se zastavil s tleskáním před číslem 30, dále počítá v duchu s učitelkou, pohybuje rty a hlavou a nakonec chybně tleskne na číslo 37. Učitelka počítání končí.

Co se asi odehrává v hlavě Lukáše? Proč tlesknul na číslo 37?

Máme zde evidenci potíží dalšího žáka, Lukáše, se synchronizací rytmů. Ze záběru je patrné, že se Lukáš velice soustředí a chce tlesknout, chce se vrátit do rytmu sudých čísel. Herní situace tomu napomáhá. Je vidět na jeho rtech, jak si s učitelkou potichu říká řadu čísel a pravděpodobně u větších čísel spotřebuje nějakou energii na zvědomění si sudých čísel. V mysli pracuje analyticky. Když si Lukáš spolu s učitelkou řekl 36, uvědomil si, že je to číslo sudé, a hned nato tlesknul. V ten okamžik ale uslyšel 37. Ihned zafungoval jeho alert¹³ a Lukáš si hned uvědomil, že to není dobře. Gesty vyjadřuje své zděšení (obr. 9.3).

12 Jan Slavík (osobní konzultace): srovnej Slavík, Janík, Najvar, & Knecht (2017, kap. 2.5.1, 3.2.4, 3.2.5).

13 Alert je slovo anglického původu a jako substantivum je překládáno jako stav pohotovosti, zvýšená ostražitost. Termín alert v tomto významu použil M. Minsky (1988).



Obrázek 9.3. Lukáš.

Na dvou dívkách vidíme, jak zajímavým způsobem řeší synchronizaci rytmů.

Jedna je dívka ve fialovém tričku uprostřed záběru 1:35–1:41, Kristýna. Patří do tleskačů. Ta přizpůsobuje rytmus tlesk-nic, tedy rytmus dvou nesourodých prvků – pohyb a klid – tak, aby oba prvky rytmu byly sourodé, a sice pohybové: tlesk-svěšení rukou. Přitom kývavým pohybem svého těla zajišťuje synchron s počítáním učitelky. Zdá se, že tedy nakonec synchronizuje dva rytmy, které sama realizuje. Oba rytmy jsou pohybové, čímž se vyhnula nutnosti koordinovat pohyb s myšlením a snad i obtížím, které vidíme u Lukáše. Bylo by zajímavé vědět, co se jí skutečně odehrávalo v hlavě. Kristýna mohla pro úspěšnou realizaci hry řadu čísel zcela eliminovat a jen realizovat tři pohyby – kývnutí těla, tlesk a svěšení rukou.

Podobně jako Kristýna se chová druhá dívka, Bára. Je možné ji vidět v průzoru mezi chlapci Honzou a Tondou v záběru 1:21–1:25, když učitelka odříkává čísla 8, 9, 10, 11, 12. Bára je dupač. Rytmus počítání čísel také převádí na pohyb. Pravou rukou se výrazně tluče do levé ruky. Přitom se velice soustředí, ani se na učitelku nedívá a bezchybně dupe.

Tyto dva případy hochů a dva případy dívek by mohly poukazovat na genderový rozdíl při realizaci této aktivity.

Vzhledem k tomu, že koordinace myšlení s pohybem je důležitá pro rozvoj intelektuálních schopností žáka, například psaní současně s myšlením, plní tato hra tedy ještě další cíl.

Hra má dvojí vliv na intelektuální rozvoj. Pro žáky, kteří se uchýlili pouze k rytmu a nevšímali si sudých, lichých čísel nebo násobků tří, je získaná znalost pouze v činnosti. Pro ty, kteří se soustředili na čísla, je získaná znalost i ve slovech, což považujeme za kvalitnější.

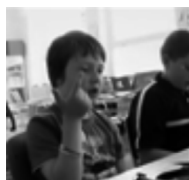
Vraťme se ještě k tomu, co se dělo ve třídě, když Lukáš udělal zjevnou chybu. Jeho chyba způsobila konec hry, tedy se dotkla celé třídy. Sám Lukáš reagoval zděšeně (obr. 9.3). Učitelka hru zastavila u čísla 37, ale nedala najevo, že příčinou konce hry je Lukášova chyba. Pokynem „hačí“ situaci zcela odlehčila, a tak ani žádný žák neřeší, že se chyba stala, a nedochází kvůli tomu k žádnému pnutí. To opět poukazuje na solidaritu, která ve třídě panuje, a na pracovní atmosféru, ke které solidarita žáků přispívá.

Řešitelské strategie, autonomie žáků

[1:59–2:03] Učitelka zapsala číslo 37 na tabuli a oznamuje: „Otázka první: Kolikrát se tlesklo?“

Dále sledujeme řešení několika žáků. Martin si znovu hlasitě odříkává násobky 2 a přitom si ukazuje jejich počet na prstech (obr. 9.4a). Jeho soused ho okřikne, aby byl zticha, a Martin pokračuje potichu. Někdo si zapisuje čárky (obr. 9.4b), někdo všechna čísla (obr. 9.4c) a někdo, tleskač, čísla sudá (obr. 9.4d), někdo soustředěně počítá v duchu a ukazuje si na prstech, někdo hledá radu u druhých (2:14, Lukáš).

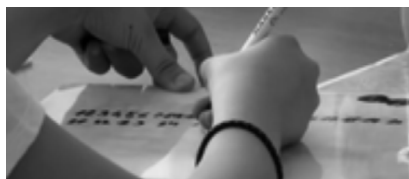
Je zajímavé, že hru žáci znali, hrají ji občas od 1. ročníku, věděli tedy, jaká bude první otázka, a přesto nikdo, žádný tleskač, neřekl hned výsledek, tedy nikdo nedokázal současně realizovat svůj rytmus sudých čísel a přitom počítat, kolik sudých čísel se odříkalo, neboli kolikrát sám tlesknul. Totéž se týká i další otázky, kolikrát se duplo. Z toho je patrné, jak je tato hra energeticky náročná.



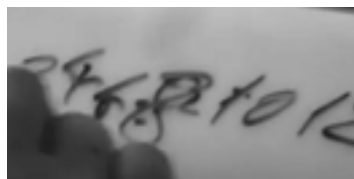
Obrázek 9.4a. Martin.



Obrázek 9.4b. Čárky.



Obrázek 9.4c. Řada čísel.



Obrázek 9.4d. Sudá čísla.

Komentář učitelky:

Hru třída nehraje poprvé. Přesto se zde objevují různé řešitelské strategie. Žáci řeší úlohu svobodně, bez předepsaných postupů. Některá řešení přebírají časem žáci od spolužáků, pokud je považují za výhodné. Pak se může stát, že se určitý typ řešení objeví ve třídě ve větším množství. Přesto se vždy najde někdo, kdo řeší úlohu jinak než většina.

Je to dobrá ukázka toho, jak učitelka systematicky a zdařile podporuje autonomii žáků. I když se ve třídě objeví řešení, ke kterému by chtěla žáky dovést, nijak ho nezdůrazňuje a nepreferuje a nechá na žácích, aby řešili úlohu svou strategií, na své úrovni. Klíčová je zde její trpělivost. Žákům dává potřebný čas, aby se kýžený poznatek mezi nimi rozšířil bez jejího nátlaku. Pouze tomu pomáhá zadáváním série vhodných úloh a třídními diskusemi o jejich řešení. Tento jev šíření poznatku mezi žáky nazýváme kognitivní osmóza (Hejný, 2014).

Řešení série úloh „Tleskni a , dupni b “ směřuje ke strategii „vyděl“: Poslední vyslovené číslo k vyděl číslem a a výsledek je počet tlesknutí. Pak vyděl číslem b a výsledek je počet dupnutí. Nakonec vyděl číslem $n(a, b)$, nejmenším společným násobkem čísel a, b , a výsledek říká, kolikrát se současně tlesklo a duplo. Děd se zbytkem a zbytek neuvažuj.

Objevení této strategie není jednoduché, neboť dělení mají žáci obvykle nejdříve sémanticky ukotvené ve dvou situacích, jak bylo popsáno v 9.1.1 – dělení na části (rozdělování), dělení po částech (podělování). Oba dva tyto případy jsou inverzní k násobení jako opakovanému sčítání – 12 dětí má po třech bonbonech. Kolik mají dohromady? Avšak ani jednomu z těchto dvou významů dělení neodpovídá situace „Tleskni, dupni“. Ta je inverzní například k situaci: Při pochodování jsme každý třetí krok dupli. Celkem jsme dupli dvanáctkrát. Kolik jsme udělali kroků? (36, nebo 37, nebo 38) Zde číslo tři neudává ani počet skupin, ani počet prvků ve skupině, ale frekvenci.

Jakmile žák pozná, že každá z těch tří situací je matematicky popsána multiplikačním triádou (3, 12, 36), tedy že znám-li dva prvky triády, umím spočítat třetí prvek buď operací násobení, nebo dělení, dochází k propojení tří sémantických situací jednou matematickou situací. Dochází tak k oslabení, nebo i ke ztrátě vazby představ o dělení na konkrétní situaci, neboli dochází k desémantizaci operace dělení a žák dospívá k porozumění dělení na abstraktní úrovni, tedy ke konceptu.

I když z pozdějších záběrů víme, že aspoň jedna žákyně, Jovanka, použila strategii „vyděl“, nakonec všichni ocenili, když byl výsledek prověřen strategií „vyjmenuj příslušná čísla“, tedy strategií na nižší úrovni nevyžadující žádnou abstrakci.

V čase 3:17 vykřikl jeden žák radostně: „Mám to.“ Byl to Martin a ukázal výsledek zapsaný na stírací destičce. Učitelka dopřává další čas na dokončení práce ostatních.

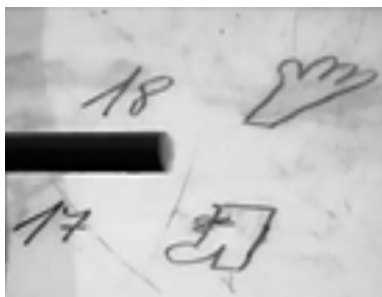
Bylo vidět, že Martin měl výsledek již dříve (2:27), ale radostně jej zveřejnil až po dalších 50 sekundách. Proč? Co tu dobu Martin dělal?

Z pozdějších záběrů vidíme, že Martin si byl jist svým výsledkem, ale přece jen jej ještě prověřoval.

Někteří žáci jsou spokojeni s nalezením řešení první úlohy, kolikrát se tlesklo, a vyčkávají na řešení zbytku třídy a další instrukce učitele (obr. 9.5b). Někteří počítají dále, kolikrát se duplo, bez výzvy (obr. 9.5a). O čem tato skutečnost svědčí?

Žáci prostředí „Tleskni, dupni“ znají, hru již několikrát hráli, sice s jiným konečným číslem než 37, ale pravděpodobně zatím stále s čísly 2 a 3. Vědí, že po první otázce bude následovat otázka druhá, na počet dupnutí. Rychlejší a motivovaní žáci jsou tedy zaměstnáni, neboť sami vědí, co dělat dál, když jsou s první úlohou hotovi. Z toho je patrné, že práce ve známém matematickém prostředí poskytuje možnosti pro individualizaci, kterou si zde stejně jako řešitelskou strategii nastavili žáci sami.

To je častý jev při práci žáka v oblíbeném prostředí. Jestliže je dříve hotov s řešením zadané úlohy, začne si sám klást otázky obdobné těm, které již slyšel od učitele: Co když...? Jak je to možné? Vychází to tak vždycky? Co by se ještě ze situace dalo spočítat? apod. To znamená, že z dané úlohové situace tvoří další úlohy. Zde by to mohlo být například: Jak by to bylo, kdybychom počítali do 45? Do kolika musíme počítat, abychom skončili současným tlesknutím a dupnutím? Na která čísla se ani netlesklo ani neduplo? Bohužel se také často stává, že učitel tuto touhu žáka jít dál¹⁴ přeruší vyžádáním si pozornosti pro společnou práci nebo další instrukce.



Obrázek 9.5a. Řešení ve 3:29.



Obrázek 9.5b. Řešení ve 3:47.

Mnohokrát jsme se setkali s tím, že rodiče, nebo spíše prarodiče nám říkali, že na přání dětí si museli doma hrát Autobus, že museli krokovat, nebo jsme viděli, že zasněžená auta u školy jsou pokreslena úlohami s ikonami zvířátek Dědy Lesoně¹⁵ podobnými těm, co řešili ve škole. Velmi často vidíme, jak žáci o přestávce pokračují s úlohami, které probírali při vyučování – staví z dřívěk, z krychlí...

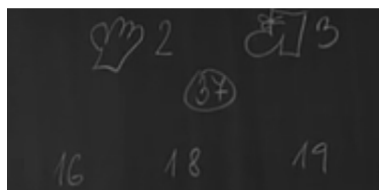
Práce s chybou

Práce s chybou je velké téma konstruktivistického přístupu k vyučování a velice důležitý prvek H-metody. Obšírně pojednává o chybě jako o edukační strategii učitele M. Hejný (2004).

V čase 3:57 učitelka sděluje, jaká řešení vidí na stíracích destičkách žáků, a přitom je zapisuje na tabuli. Objeví se nejdříve tři řešení: 16, 18, 19 (obr. 9.6) a po chvíli žák Tonda v první řadě přidá ještě výsledek 74. Třída na žádný výsledek zapsaný na tabuli nereagovala, jen tento nenechala bez povšimnutí a nesouhlasně zahučela. Učitelka opakuje čtyři různá řešení a ničím nedá najevo, které řešení je chybné a které správné.

Proč učitelka zapisuje na tabuli všechny výsledky a ne jen ten správný? Jaký dopad to má na žáky?

Takovýmto chováním učitelka vyjadřuje respekt ke každému žákovi a k jeho práci. Každý výsledek si zaslouží být zapsán na tabuli a být diskutován. Není tedy důležité, zda je výsledek správný, ale je důležité, jak si jej autor obhájí.¹⁶ Dopad tohoto respektujícího, dialogického přístupu na žáky je ten, že se nebojí chyby a nepovažují ji za něco negativního. Při obhajování chybného výsledku vždy něco nového poznají, přinejmenším příčinu své chyby.



Obrázek 9.6. Výsledky.

15 Autobus, Krokování a Děda Lesoně jsou jiná klíčová sémantická aritmetická prostředí využívaná v H-metodě (Hejný, 2014).

16 Jan Slavík (osobní konzultace) dodává: V širších souvislostech se jedná o zabezpečení cyklického sdílení znalostí směřujícího k rozvoji instrumentální matematické zkušenosti – pro ni je podle Kvasze (2015, s. 145) mimo jiné příznačná klíčová idea systematického dokazování v explicitně zformulovaném axiomatickém systému. Srovnej Slavík, Janík, Najvar, & Knecht, 2017, kap. 1.1.4, 1.2.1.9.

Jako první se diskutuje řešení 74 žáka Tondy. Učitelka se ptá, proč toto řešení třídu nejvíce zaujalo.

Učitelka se neptá, zda je řešení dobře, nebo špatně. Takto formulovanou otázkou dává najevo, že chyba není považována za něco negativního. Tato učitelka obvykle, jak také lze vidět z jiných jejích videonahrávek, formuluje otázku směřující ke zjištění, zda je řešení správné, či chybné, takto: Tak kde je pravda? Co je pravda? Vede tak žáky ke vnímání matematiky jako cesty hledání pravdy a není podstatné, zda na té cestě uděláme chybu. Naopak, ta nás vždy někam dále posune, umožní nám hlouběji porozumět situaci, problému.

U mnoha učitelů přezívá předsudek, že chybná řešení se nesmí nechat na tabuli, že o nich raději nebudeme moc mluvit, aby si je děti neuložily do paměti. Tento předsudek pramení z neznalosti mechanismu poznávacího procesu v matematice. Při učení se nějakým faktům, při učení se jazykům to tak funguje, neboť učení je založeno na asociacích. Mechanismus učení se matematice lze popsat podle teorie poznávacího procesu v matematice (Hejný, 2014, s. 40) stručně posloupností:

Motivace → zkušenost (izolované modely) → zobecněná zkušenost
(generické modely) → abstraktní poznatek

Nebezpečí ze zafixování si chyby imprintingem¹⁷ hrozí pouze tomu, kdo se matematiku učí uchopováním paměti, memorováním a ne cestou porozumění.

[4:36] Honza, Tondův soused, zdůvodňuje, proč výsledek nemůže být 74:
„Nemůže to být 74, když dohromady se 37krát buď tlesklo, anebo duplo a počítali jsme do 37.“

Ani Honza neřekne, že je výsledek špatně, ale argumentuje, proč takový výsledek nelze dostat – nelze dostat větší číslo než to, do kterého se počítalo. Jeho myšlenka je přesná, její artikulace je trochu neobratná.

[4:52] Učitelka: „Kde je chyba?“

Tím se učitelka vlastně ptá po příčině chyby. Asi myslela: Kde Tonda ve svých úvahách udělal chybu? A žáci to vědí, neboť vzápětí nastává série žakovských argumentací, proč výsledek nemůže být 74. Někteří žáci se pokouší vcítit se do myšlení autora chyby a hledat její příčinu. V širších souvislostech transdidaktické teorie bychom řekli, že se žáci pokusili mentalizovat (tj. srozumitelně reprezentovat) proces myšlení autora chyby. Přitom museli zvládnout nejméně dvě operace: (a) uvědomit

¹⁷ „Imprinting – percepční vtištění, hluboká a trvalá senzibilizace jedince na soubor podnětů, znaků“, „imprinting – je jakoby forma okamžitého učení...“ (Sillamy, 2001).

si vlastní proces řešení (metakognice v rovině autoreflexe), (b) vytvořit *empatickou simulaci*: zaujmout pozici druhého a vytvořit hypotézu o jeho postupu s odhadem důvodu chyb.¹⁸

Mentalizace

Martin: „I kdybyste to dělala (ukazuje rukou ‚metronom‘) do 74, tak stejně by se 74krát netlesklo. Tlesklo by se jakoby polovina. To máme ... 37.“

Tento argument má strukturu matematického důkazu sporem: Předpokládejme, že výsledek je správný, a logickými úsudky z předpokladu dojdeme ke zjevnému sporu, a tedy výsledek nemůže být správný. Poukazuje na vyspělost Martinova matematického myšlení.

Učitelka tento argument sama odsouhlasila: „Ano.“

Asi by zde bylo vhodnější, zejména vzhledem k charakteru Martinova argumentu, ho nabídnout k posouzení třídě výzvou: „Rozumíte Martinovi?“ Martin je matematicky vyspělejší žák a je pravděpodobné, že jeho myšlenky mnozí žáci nestihají zpracovat. Pro žáky, kteří rozumí Martinovým myšlenkám, by bylo užitečné, kdyby je někdo svými slovy zopakoval. Proč to učitelka neudělala?

Zde asi musíme zvážit tu skutečnost, že je již čtvrtou hodinu v záběru kamery, a také, což je pravděpodobnější, že nechce ztrácet dynamiku procesu řešení.

Honza dodává: „On to asi sčítal.“

I na jiných videích vidíme, že učitelka důsledně pracuje s chybou žáka tak, že ho přivede k nalezení příčiny chyby. Není účinné žáka na chybu upozornit, ani argumentovat, že je to skutečně chyba, ale nejúčinnější nástroj, jak docílit toho, aby žák příště chybu neopakoval, je, že žák porozumí příčině své chyby. Důslednost učitelky v oblasti rozvoje empatie žáků do myšlení druhých se nyní projevila tak, že se žáci sami snaží nabídnout, jak k chybě mohlo dojít.

Jedna základní technika učitele, jak žáky učit metakognitivním pohledům do svých myšlenkových procesů, a tím také mentalizovat proces myšlení spolužáka, je, že učitel při vlastní chybě, ať vědomé nebo nevědomé, začne před žáky v rovině autoreflexe nahlas uvažovat o tom, proč sám chybu udělal, např.: „Aha, já jsem si řekl, že když je tady slovo celkem, tak se bude asi sčítat, a už jsem to dál pořádně nečetl.“

A může i ukazovat, jak jít dále do úvah co dělat, aby se chybě příště vyhnul: „Kdybych si to pořádně přečetl, tak poznám, že se má odčítat. No příště si tedy musím úlohu pořádně přečíst až do konce a třeba si tu situaci zahrát, nebo aspoň představit, abych do toho lépe viděl.“

I další spolužáci se přidali k myšlence, že příčina chyby byla ve sčítání $37 + 37$. Žák Tonda, autor chyby, se však ohradil, že nesčítal, ale násobil. Následuje diskuse o tom, zda násobení je „horší“ než sčítání, kterou vyvolal Martin a v níž se pokouší dát najevo svou intelektuální převahu.

Diskusi učitelka uzavírá s úsměvem otázkou: „Tak Tondo, víš, kde máš problém?“ (6:22)

Co učitelka sleduje tím, že do diskuse nevstoupí, Martina neumravní a jen se shovívavě usmívá?

K odpovědi na tuto otázku se vrátíme za chvíli. Z celého videa je patrné, že Martin je poměrně intelektuálně sebevědomý, vždy komentuje situaci, hledá „lepší“ řešení, upoutává na sebe pozornost a má rád poslední slovo.

Tonda se hned nevyjadřuje, a tak se chápou jiní žáci příležitosti ukázat svou empatii vůči myšlení spolužáka. Bára soudí, že když se počítalo do 37, pak Tonda viděl na tabuli tu dvojku, tak si myslel, že se to má násobit dvakrát. To je na 10letou dívku velice vyspělý úsudek o tom, jak mohlo dojít k propojení čísel 37, 2 a 74.

[7:17] Dále učitelka volí, že se bude obhajovat výsledek 19, a hledá autora a obhájce. Ozve se ze třídy: „Honzo, zvedni ruku.“ Honza, Tondův soused, hned řekne, že udělal chybu a souhlasí s učitelkou: „Tak to nebereme, jo?“

Proti svým zvyklostem se učitelka již neptá, kde žák udělal chybu. Je zde pozoruhodné i to, jak třída sledovala, kdo jaký výsledek přinesl. Domníváme se, že Honza se hned nepřihlásil proto, že již věděl, že udělal chybu, a již nestálo za to o tom mluvit. Ani tato situace nevyvolala žádné napětí ve třídě. Vidíme, že děti rády obhajují svá řešení a rády posuzují řešení ostatních. Motivací k tomu je, že vždy něco nového poznají nebo někomu pomohou.

Obhájců výsledku 18 je ve třídě více a na číslo 16 zvedá ruku jenom Bára. Tonda rozhoduje o tom, který výsledek se bude obhajovat.

Učitelka Jitka obvykle volí k obhajobě jako první chybný výsledek. Dává tím příležitost jednak k tomu, aby si žák svou chybu našel sám, a také, jak bylo vidět, k rozvoji empatie a kritického myšlení žáků. Nyní měla učitelka tendenci opět zvolit chybný

výsledek k obhajobě, ale nakonec vyzvala žáky, aby oni rozhodli, co se bude dále obhajovat. Předchází tak vzniku stereotypu, že se vždy nejdříve obhajuje chybný výsledek. Naštěstí padla volba na číslo 16 a k tabuli jde Barča, jako jediná autorka tohoto výsledku (7:48).

Komentář učitelky:

Barča obhajuje výsledek 16. Barča již tuší, že její výsledek je chybný. Nikdo se k jejímu výsledku nepřidal. Přesto šla k tabuli své řešení ukázat. Teď očekává, že se dozví, kde udělala chybu. Chování Barči ukazuje na fakt, že chyba v tomto kolektivu není nežádoucí jev. Barča už dobře ví, že pokud najde lokalitu své chyby, neudělá chybu příště znovu. Chce přijít na to, proč má chybné řešení.

S komentářem učitelky je nutno souhlasit až na to, že jde o lokalizaci chyby. Je patrné, že si je učitelka vědoma svého pedagogického úspěchu, že dokázala systematickou prací žáky za dva roky přivést k práci s chybou tak, že se chyba stala pro žáky zdrojem nového poznání a hlubšího porozumění. Ze záznamu však není patrné, že Bára jde vědomě obhajovat chybu. Můžeme ale předpokládat, že učitelka Báru dobře zná, že si umí stát za svým řešením, i když je jediná ve třídě, dokud sama skutečně neporozumí příčině chyby nebo nepřesvědčí ostatní o správnosti svého řešení.

Komunikace učitel-žák

[7:56] Bára u tabule vysvětluje, jak počítala. Mluví zády k učitelce a ani do třídy se nedívá. Je soustředěná a uzavřená do své mysli. Učitelka po Báře celý postup zopakovala.

Proč to učitelka udělala? Mohla to udělat ze dvou důvodů. Pravděpodobnější je ten, že si sama ujasňuje, že Báře dobře rozumí. Druhým důvodem může být to, že chtěla držet dynamiku řešitelského procesu, a tímto předešla případným nedorozuměním plynoucím z nepřesných formulací Báry („a potom jsem počítala dál a napočítala jsem 6...“). Zopakovala to tedy zřetelněji: „Barča počítala násobky přes 20, jednu desítku věděla, že má, a pak napočítala 6 dalších násobků přes 20, rozumím tomu dobře? A vyšlo jí 6.“

Učitelka přeříkala Bářiny úvahy pro sebe srozumitelněji, to však ještě neznamená, že se to stalo srozumitelnější pro žáky. Vzhledem k ostatním žákům by bylo vhodnější zeptat se, zda a jak Báře rozuměli, a případně to nechat jiného žáka přeříkat jeho slovy.

Mnozí učitelé mají jistě zkušenosti s tím, že když oni něco žákům vysvětlují přesným matematickým jazykem, že jim žáci rozumí hůře než svým vrstevníkům, kteří své formulace mají plné nepřesností, ukazovacích zájmen, balastních slov. Zkrátka, žáci si mezi sebou většinou rozumí lépe, než když jim něco vysvětluje učitel. Je to v důsledku používání stejného komunikačního nástroje, stejného jazyka, kterému rozumí, mají podobné zážitky, které do svého porozumění promítají. Učitel se snaží o matematickou (terminologickou i logickou) přesnost a do svého vysvětlování promítá své vlastní porozumění, tedy psychiku dospělého člověka.

Vzápětí se však učitelka zeptala: „Kde má Barča problém?“ To již mnoho dětí mělo zvednutou ruku.

Zde můžeme vidět didaktickou chybu učitelky, která není zcela v souladu s H-metodou, a sice že tím, že řekla „Kde má Bára problém?“, dala najevo, že Barčin výsledek není správný, dříve, než mohli žáci zareagovat.

Konfrontace dvou řešitelských strategií

[9:09] K tabuli je zavolána Jovanka, která má výsledek 18.

Jovanka však nereaguje na Báru, ale ukazuje svůj způsob řešení. Napíše na tabuli: $37 : 2 = 18(1)$.

Martin se také hlásí, aby mohl jít k tabuli. Je nespokojen s tím, že by postup Jovanky byl srozumitelný. Jovanka uchopila situaci strukturálně, bez vazby na její sémantiku. Své mentální schéma multiplikativní triády měla obohaceno o strukturální pohled. Pro Martina a většinu dalších žáků to bylo v této chvíli ještě nesrozumitelné. (9:39) Ačkoliv je Martin v matematice velice zdatný, je patrné, že u něj ještě neproběhla desémantizace situace a setrvává ve vazbě na konkrétní situaci. Ukázal svou strategii – vyjmenoval všechna sudá čísla od 2 do 36, za každé udělal čárku a ty pak spočítal. Ze třídy se ozvalo potvrzení: „Jo, jo,“ a někdo zatleskal. Proč?

$$10 + 6 = 16$$

$$37 : 2 = 18(1)$$

Obrázek 9.7. Dvě řešení.

Je to projev radosti některého žáka ze svého vlastního úspěchu, z porozumění řešení, které Martin záměrně upravil tak, aby bylo pro všechny názorné, a ne ocenění samotného Martina. Ten se umí prosadit dostatečně sám a nepotřebuje povzbuzení spolužáků.

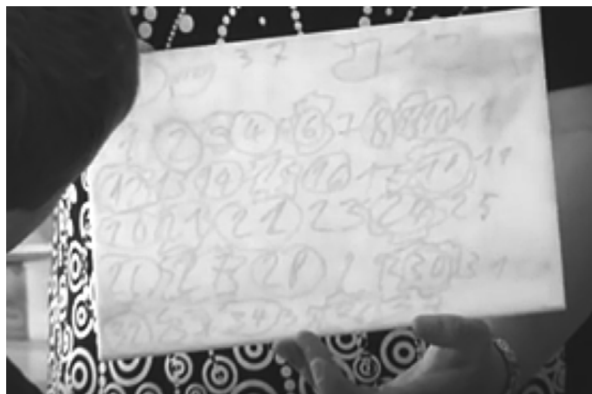
Učitelka nechala třídu odsouhlasit řešení: „Bereme?“ A dále se zeptala: „Kdo to dělal podobně jako Martin nebo Jovanka? A kde má Bára problém?“

Zde by asi bylo lepší oddělit otázky na postup „jako Jovanka“ a „jako Martin“ z již uvedeného důvodu. Martinovo řešení si ponechává sémantiku, je procesuální, názorné, a Jovanky strukturální, abstraktní. Mnoho dětí se následně přihlásilo, ale nebylo poznat, na co vlastně reagují. Pravděpodobně si ani Jitka neuvědomila rozdílnou úroveň řešení Martina a Jovanky.

Nakonec Bára sdělila, kde udělala chybu – jen se přepočítala. Po jisté době (14:40) se učitelka vrací k Báře, nezapomněla na ni a věnuje jí čas, aby mohla vysvětlit, kde udělala chybu. Bára přesně popisuje znovu svůj proces myšlení a poukazuje, kde se spletla.

Zpředmětnění motorických zkušeností – konceptualizace procesu

[10:50] Dále vysvětluje své řešení žákyně Kačka, ale když ukazuje svůj produkt, učitelka se sama ujala vysvětlování. Kačka napsala na stírací destičku nejdříve všechna čísla, pak zakroužkovala každé druhé číslo hladkým kroužkem, každé třetí vlnitým kroužkem a někde vyšly kytičky – tam, kde se dupalo a tleskalo zároveň.



Obrázek 9.8. Řešení Kačky.

Proč učitelka nenechá Kačku nebo jiného žáka vysvětlit, jak tomu rozumí?

Asi ze stejného důvodu jako minule – chce si sama do grafiky zjednat vhled. Vyzve dále žáky, aby k ní přišel ten, kdo se na produkt Kačky chce přijít podívat, a těm vysvětluje, jak to Kačka myslela. Jde tam také Bára, která nad řešením Kačky zakroutila hlavou a rychle se vrátila do své lavice.

Martin uzavírá epizodu s neskrývaným obdivem trefným sdělením „tři v jednom“. Nakonec jí zatleská a řekne, že Kaččino řešení je nejlepší. (12:24) Proč se asi Martinovi tolik líbilo řešení Kačky, proč Bára zakroutila hlavou?

Jsme opět svědky soudržnosti třídy a snahy dobrat se porozumění, která je silnější než snaha vyniknout. Učitelka na Martina nijak zvlášť nereaguje a shovívavě přehlíží jeho sebeprosazování, slabší žáky podporuje. Nejen zde, ale v průběhu celé hodiny nabízí žákům vzorce chování vůči různým psychikám žáků.

Vysvětleme, co vlastně Kačka udělala a proč to mnohým žákům pomohlo, když na první pohled je to řešení pracné a zdlouhavé.

Kačka obrázkem celý proces konceptualizuje. Převeď všechny přítomné procesualní rytmy na statické a vizuální – grafické. Nyní je o nich trvalá grafická evidence, ze které lze vyčíst odpovědi i na ještě nevyřešené otázky. O souvislosti mezi schopností převádět mezi různými systémy reprezentací a rozvojem myšlení píše Gruszcz-Kolczyńska a Zielinska (Gruszcz-Kolczyńska & Zielinska, 2015). Pro Martina znamenalo porozumění zápisu Kačky přechod od procesu ke struktuře, a to ho katapultovalo i na vyšší úroveň řešení dalších otázek (viz 21:23). Jeho představy se oprostily od vazby na hru a počítání čísel a začal dále využívat strukturu tabulky násobků, do které pak s řešením další otázky hlouběji pronikal.

Komunikační nedorozumění

[12:50] Se svým řešením se má ještě přijít pochlubit Klárka. Jenže ona začíná vysvětlovat, že našla problém u Báry. Říká: Když si tu 16 vydělíme dvěma, tak nám nevyjde ani 37, ani 36.

[13:07] Nastává chvíle komunikačního nedorozumění. Učitelka si opět pokouší zjednat pro sebe jasno a ptá se, kolik je $16 : 2$. Klárka je v úzkých a na zápise Báry ($10 + 6 = 16$) se snaží ukázat, jak to myslela: „2 krát 10 je 20 a 2 krát 6 je 14 a 20 plus 14 je jenom 24.“

Klárka je dobrá počtářka, proč nyní udělala tak zjevné chyby? Proč třída ihned na chyby nereaguje? Učitelka dokonce musí vše, co Klárka řekla, zopakovat.

Je zde již vidět únava žáků a dynamika řešení upadá. Klárka spotřebovala veškerou energii na hledání, kde má Bára problém, a již jí nezbyvá dostatek energie na artikulaci dobrých myšlenek. Tento jev nazýváme „jev myš“. Když se žáci v diktátě na vyjmenovaná slova soustředí na to, zda ve slově myš napsat i nebo y, tak jim to odčerpá energii a udělají pak banální chybu – zapomenou napsat háček nad s.

Příčinu chyby Klárky odhaluje Kačka: „Místo aby řekla vynásobíme, tak řekla vydělíme.“ Někdo ze třídy je však nespokojen a říká, že Klárka vlastně neodhalila žádný vážný problém. Je tedy vidět, že přes únavu aspoň někteří žáci pozorně sledují a dokáží vystihnout podstatu toho, co se odehrálo.

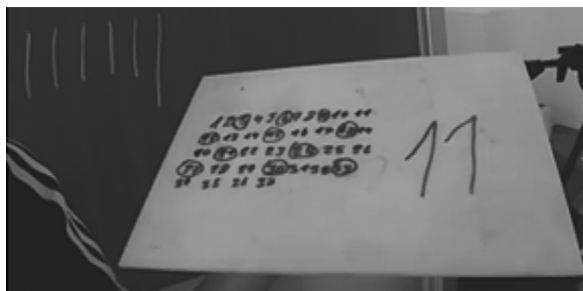
Kognitivní osmóza

[15:06] Učitelka: „Otázka číslo 2: Kolikrát se duplo?“

Opět učitelka zapisuje na tabuli řešení žáků – 11, 12, která se nyní objevila ve-
lice rychle.

Je vyvolán Lukáš, autor výsledku 11, který se vehementně hlásil. Spokojeně ukazuje, jak má na stírací tabulce napsána všechna čísla do 37 a jak si to „dělal pro trojice“, a tak mu vyšlo 11.

Lukáš převzal řešitelskou strategii Kačky, která mu zprostředkovala instrumentální zkušenost. Aplikoval ji na řešení druhé úlohy. Došlo zde opět ke kognitivní osmóze – žáci přebírají poznatky od ostatních žáků. Tentokrát tím poznatkem byla řešitelská strategie: Převedl si proces tleskání, dupání na uchopitelnější reprezentaci vizuální a pak vyznač každé třetí číslo.



Obrázek 9.9. Řešení Lukáše.

Po obvyklé otázce, zda má Lukáš pravdu, se Honza ujal kontroly Lukášova řešení a spolu s Martinem odhalili, že zapomněl zakroužkovat číslo 36, a opravili výsledek na 12. Zde je nutné připomenout, že Lukáš je slabší žák a že v tomto okamžiku i po 3,5 hodinách práce vykazuje stále značné nasazení.

[17:08] Dále ukazuje své řešení Eliška, která kopíruje strategii dříve předvedenou Martinem – počítá si násobky tří.

Změna řešitelské strategie

[17:38] Učitelka: Má někdo nějaké úplně jiné řešení než to, co použil u tleskání?

Čím je tato otázka zajímavá? Otázka se ptá na změnu strategie řešení dvou úloh stejného typu v rámci jedné úlohové situace. Při analýzách řešitelských procesů žáků je důležité sledovat okamžiky, kdy dochází ke změně strategie, a hledat impulsy a příčiny těchto změn. To nám dává nahlédnout do procesu učení žáka.

Hlásí se Martin. U tleskání si čárkoval a u dupání se díval na tabulku násobků, protože byl líný zase čárkovat.

Zde je patrné, jak je důležité neurychlovat řešitelské procesy žáků tím, že jim hned nabídneme efektivnější strategie, a že úmorná cesta k výsledku vede k aktivaci tvořivosti a k hledání efektivnější strategie. Martin přešel od procesuální strategie postupného vyjmenovávání sudých čísel ke strategii, kde již využil strukturu čísel, tabulku násobků. Impulzem k tomu mu pravděpodobně bylo řešení Kačky, které tak výrazně ocenil. Strategii ještě posunul dál a využil hotového produktu, tabulky násobků, která visela na zdi ve třídě (obr. 9.10) a kde násobky tří byly již napsány.

[19:32] Učitelka formuluje poslední otázku: „Kolikrát se tlesko i duplo zároveň?“ Pak zapisuje na tabuli řešení 6, 5, 30, 29, 4.

[20:32] Výsledek 6 obhajuje Kristýna. Používá strategii Kačky.

[21:23] Martin využívá svou strategii práce s tabulkou násobků: „Já jsem se zase díval na násobící tabulku a na každý sudý číslo jsem si jakoby udělal čárku.“ V tabulce N ukazuje v řádku násobků tří pouze sudá čísla 6, 12, 18, 24, 30.

Martin přitom využívá poznatku, že v tomto řádku se střídají sudá a lichá čísla. Kdyby pracoval s řádkem násobků dvou, tak tam nejsou žádná lichá čísla, která by hned mohl eliminovat. Martin zde integruje nejméně dva poznatky – násobek dvou je vždy sudé číslo a v řadě násobků tří se střídají sudá, lichá čísla. Pracuje již se společnými násobky čísel 2 a 3, ale ještě je nepojmenovává.

Učitelka posunuje ne příliš srozumitelný výklad blíže ke srozumitelné terminologii: „Tak ty jsi šel po sudých číslech násobků tří.“

Učitelka se ujišťuje: Kdo tomu rozumí a kdo vůbec? Na to se přihlásilo mnoho žáků. To byl asi důvod, proč Martinovo uchopení situace strukturou uzavřela sama. Věděla, že by to stejně bylo nad síly mnoha žáků, a konstatovala, že to není tak důležité, hlavně, že tomu rozumí Martin. Dala tak najevo respekt vůči všem žákům a jejich způsobu řešení. Žádný způsob není horší než jiný, pokud mu dobře rozumíme.

Lukáš se dostal k výsledku tak, že sečetl $11 + 18$. Je pozoruhodné to, že vzal do úvahy výsledek 11 , který měl již opraven na 12 . Jenže si ho neopravil sám, nýbrž jeho spolužák. Tímto řešením se již vzdálil od propojení na počáteční hru a pracoval jen s dílčími výsledky. Spojka a („a zároveň“) jako signální slovo pro operaci sčítání (a také asi i nedostatek intelektuální energie) ho dovedla k výsledku 29 .

Dostatek energie projevuje Martin, který opouští svůj pohled na strukturu čísel a v komunikaci s ostatními žáky se vrací k prožitkům ze hry, které používá v argumentaci, že operace sčítání dílčích výsledků není možná: „Bylo slyšet, že občas jsme dupli a tleskli nastejno.“

Honza argumentuje, proč výsledek nemůže být 30 : Když se tlesklo 18 krát, tak se nemůže dohromady tlesknout a dupnout 30 krát. Je to téměř přesný matematický důkaz přímý – z pravdivého tvrzení vyvodíme logickými úsudky zase pravdivé tvrzení.

I když Martin opakovaně obhazuje výsledek 6 a ukazuje, že výsledek 5 není možný, dostává ještě nakonec příležitost Bára. Učitelka si je vědoma toho, že sledovat Martinovo uvažování, i když je správné a na vysoké úrovni, je mimo možnosti některých dětí, jak bylo řečeno výše.

Bára již jako první ze třídy použila ve svém řešení nejmenší společný násobek čísel 2 a 3 : „Já jsem si to zjednodušila a počítala jsem násobky šesti.“ Dále vysvětlovala, že „v násobcích šesti jsou sudá čísla a ty jsou v násobcích dvou i třech.“ Ani si asi neuvědomuje, že právě dospěla ke klíčovému objevu.

[27:20] Martin chvíli oponuje, je vidět, jak usilovně přemýšlí, a nakonec přizná, že má Bára pravdu a že to, co Bára řekla, je pro něho nový objev.

Tedy i on přijal myšlenku společných násobků. Užasle hledí na tabulku násobků a hned jde řešení ukázat. Dříve on svá řešení hledal jako sudá čísla v násobcích tří, kde ale měl potíž s tím, že řada končila u 30 . Nyní objevil, že všechny sudé násobky tří jsou vidět pod číslem 6 , tedy stačí spočítat, kolik jich je do 36 .



Obrázek 9.10. Tabulka násobků.

Martin pln radosti z nového poznání se nedokáže udržet a neustále vstupuje do komunikace. Protože se Martinovo asertivní chování dotýká již celé třídy, učitelka ho s úsměvem napomíná: „Nech taky promluvit někoho jiného, chlače.“

Téměř po půl hodině diskusí o způsobech řešení, o chybných řešeních, obhajování, argumentaci tedy aspoň dva žáci ze třídy dospěli k objevu společného násobku dvou čísel i k objevu strategie „vyděl tím společným násobkem číslo, které se řeklo naposledy, a neuvažuj zbytek“. Několik dalších žáků však již bylo od něj malý kousek. Jestliže tito žáci v příští hře použijí myšlenku společného násobku, hovoříme o tom, že si poznatek ovlastnili.¹⁹

Často se stává, že aniž by se dále řešily obdobné úlohy, mentální schéma pojmu společný násobek se v žákově mysli obohatí novými zkušenostmi, nové poznatky se propojí se stávajícími a dojde k vytvoření konceptu.

Závěrem

Uvedená kazuistika měla za cíl ilustrovat myšlenku tvorby mnoha různých prostředí jako nástrojů, které dětem dávají možnost, aby si „pri riešení určitého problému samé zvolili cestu. Používaním rozličných nástrojov v kontexte jedinej úlohy (u rôznych detí v triede) dochádza pri následnej diskusii riešení k ich prepojeniu. Pritom zvlášť dôležitý druh prepojenia je *prepojenie symbolických a ikonických (teda geometrických) nástrojov*“ (Kvasz, 2016, s. 25).

¹⁹ M. Hejný (2014) popisuje význam slov osvojit a ovladnout. K osvojení dochází tehdy, když žák přijme hotový poznatek a používá jej: Nevypovídá to o porozumění. K ovládnutí dojde tehdy, když se žák aktivně podílí na odhalování nějakého pojmu, vztahu, procesu a je těsně před jeho objevem, když jej jiný žák formuluje. Má pak pocit, že jej vlastně objevil sám.

Žáci se učí místo „výcviku práce s konkrétnym reprezentačným nástrojom [...] tú istú situáciu vyjadriť v rôznych prostrediach. Tým predchádza tomu, aby si deti zamieňali pravidlá fungovania (náhodne zvoleného a konvenčne vybudovaného) nástroja s matematickou realitou, ktorú pomocou neho poznávajú“ (Kvasz, 2016, s. 24).

Je pravděpodobné, že v kontextu „Tleskni, dupni“ žáci dosud v průběhu od 1. ročníku řešili posloupnost níže uvedených úloh. Protože zde jde o výuku orientovanou na budování schémat, souběžně s tím žáci řešili mnoho dalších úloh zaměřených na rytmus v jiných reprezentacích (vizuálních grafických a číselných), i úloh, ve kterých se prolínají dva rytmy, jako například:

1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ..., nebo a, b, C, d, a, B, c, d, A, b, c, D...

Žáci mají příležitost budovat mentální schémata jistých konceptů na základě bohatého a pestrého spektra podschémat daného konceptu a vazeb mezi nimi. „Upřesňování intuitivně poznaného schématu, tedy tvorba proto-schématu, přispívá k rozvoji intelektuálních potencií žáka ve více směrech. Jsou to zejména:

(a) potřeba

- upřesňovat pojmy,
- argumentačně podporovat odhalené vztahy,
- hledat vhodný jazyk na popis procesů a situací,
- kriticky přijímat informace,
- odhalovat vztahy mezi schématy a tvořit tím obecnější schémata, a

(b) schopnost uvedené potřeby sanovat.“ (Hejný, 2014, s. 112)

Uvedeme zde sérii typů úloh, které žáci pravděpodobně v průběhu tří let před popisovanou výukovou situací řešili:

I. Kolikrát se tlesklo?

- a) Tleskni 2. (Počítáme v oboru do 20.)
- b) Tleskni 2. (Počítáme přes 20.)
- c) Tleskni 3. (Počítáme v oboru do 30.)
- d) Tleskni 3. (Počítáme přes 30.)

Gradačními parametry uvedených úloh jsou: (1) číslo, které určuje frekvenci (2, 3, ...), a (2) číslo, do kterého se počítá. Zde je třeba uvažovat jednak o jeho velikosti (do 20 nebo 30 – nejvyšší číslo řady násobků daného čísla v rámci malé násobilky, a přes 20 či 30), také hraje roli to, zda je číslo násobkem frekvence (daných čísel 2 nebo 3), nebo není.

Tato série aktivit, ve které se prolínají motorické (žáci nejdříve v synchronu s počítáním vykonávají pohyb – tleskání), mentální (žáci v mysli vytváří reprezentaci celé procedury), symbolické a ikonické (žáci hledají evidenci procedury – instrumentální praxe), argumentace a matematické uchopení (tlesklo se na každou druhou, tedy na sudá čísla, tedy vydělíme dvěma se zbytkem a zbytek nebudeme uvažovat), přispívá zkušenostmi do prolínajících se schémat pojmů násobek (čísla 2, 3, ...), relace „býti dělitel“, případně pojmu zbytek při dělení (číslem 2, 3, ...), což je 1, resp. 2.

Dále uvádíme typy úloh, které žáci mohli řešit v době krátce před popisovanou výukovou situací a ve kterých se již mísí dva rytmy s různými periodami.

II. Kolikrát se tlesklo a duplo zároveň?

e) Tleskni 2, dupni 3. (Počítáme v oboru do 30.)

f) Tleskni 2, dupni 3. (Počítáme přes 30.)

Úloha typu f) je zde popisovaná. Tato série přispívá k budování schématu společný násobek čísel 2 a 3, jak jsme mohli sledovat.

Další gradace obtížnosti je dána velikostí čísel určujících frekvenci. Čísla jsou zatím stále nesoudělná, například (tleskni 2, dupni 5), (2, 7), (3, 4), (3, 5)... Tato série přispívá do schématu pojmu společný násobek dvou čísel a vede k odhalení poznatku, že společné násobky dvou čísel jsou násobky jejich součinu.

Pro upřesnění představy o nejmenším společném násobku je třeba ještě dodat úlohy, kde čísla označující frekvenci jsou soudělná, čímž přibývá gradační parametr: 3) soudělnost či nesoudělnost čísel určujících frekvenci. Nejdříve zvolíme taková dvě čísla, že jedno je násobkem druhého – (tleskni 2, dupni 4), (2, 6), (3, 6), a nakonec taková, že žádné není násobkem druhého: (4, 6), (6, 9)...

Taková série úloh, ve kterých se neustále prolíná matematické zdůvodňování s aktivitami tleskání, dupání, případně nahrazenými jinými nástroji, které jsme zde viděli, přispěje k odhalení a hlubšímu poznání konceptů společný násobek dvou nesoudělných a soudělných čísel, společný dělitel dvou čísel a k odhalení strategie řešení. Tím je návod, jak najít, kolikrát se tlesklo a duplo zároveň, aniž bychom si museli celou hru sehrát ještě jednou: *Vezmi nejmenší společný násobek čísel daných ve hře a tím vyděl se zbytkem číslo, do kterého se počítalo. Zbytek neuvažuj. Dosta- neš tak počet, kolikrát se duplo a tlesklo zároveň.* Ilustrujme formulovanou strategii na konkrétním zadání: Tleskni 6, dupni 9, počítáme do 59, kolikrát se tlesklo i duplo zároveň? Řešení: Poprvé se společně tlesklo a duplo při čísle 18 – to je nejmenší společný násobek čísel 6 a 9. Teď musíme zjistit, kolik násobků 18 se objeví v řadě čísel do 59. $59 : 18 = 3$ (zb. 5). Tedy celkem se zároveň tlesklo a duplo třikrát.

V první, *tematické* vrstvě poznávacího procesu, který jsme sledovali ve vyučovací hodině, jsou fenomény, které jsou nejbližší bezprostřední smyslové zkušenosti žáků (v tomto případě zejména dupání, tleskání psaní) propojovány s vnímáním a uvědomováním si určitého obsahu („vím“, že dupám, „znám“ počet dupnutí, „umím“ počet dupnutí zjistit, někdy se v něm „spletu“, ale „vím“, co udělám, abych si to ověřil). Jde o vědomí „(proto)matematického“ obsahu. To znamená, že v této úrovni se prostřednictvím „mísení“ (konceptové integrace, „blendingu“) „budují matematické představy“ a rozvíjí se „geneze pojmu“ ve směru utváření (mentálního) schématu příslušného konceptu a jeho souvislostí.

Z pohledu Hejného Teorie generických modelů (Hejný, 2014) zde probíhají první dvě etapy poznávacího procesu. První je motivace žáků k poznávání. Každou samostatnou úlohu Tleskni, dupni lze v pojetí Teorie generického modelu (TGM) považovat za izolovaný model budoucího poznatku, čímž je uvedena strategie řešení. Když učitel úlohy systematicky graduje popsáním způsobem, umožní tak aspoň některým žákům vnímat soubor těchto úloh jako komunitu, kterou cosi spojuje. (Vznikají strukturní souvislosti utvářejícího se mentálního schématu.) Nejdříve počet společných tlesknutí a dupnutí byl násobkem čísla 6 ($2 \cdot 3$) – typy úloh e), f), v dalším typu úloh to byl násobek čísla 10 ($2 \cdot 5$), potom násobek 14 ($2 \cdot 7$) atd. Poznání, že tyto všechny úlohy spojuje to, že se vždy počítá se společným násobkem dvou zadaných čísel a že jejich počet v řadě odříkaných čísel je počet společných tlesknutí a dupnutí, je již na vyšší zobecněné úrovni. Ta je v TGM pojmenována generický model.

Samozřejmě, že každý žák může dospět k tomuto poznání v jiném okamžiku, a některým žákům množství zkušeností neboli izolovaných modelů nebude stačit k tomu, aby u nich došlo k tomuto kognitivnímu posunu. To ale není tak podstatné. Podstatné na tom je to, že tyto aktivity vedly u všech žáků k obohacení mentálních schémat již několikrát zmíněných matematických pojmů, a některé žáky přivedly k hlubokým objevům.

Ve druhé, *konceptové* vrstvě jsou „ryze matematické“ reprezentace (ikonické, symbolické) a procedury, které patří do instrumentální praxe oboru (Kvasz, 2016). V našem případě jde o pojem nejmenší společný násobek a o strategii „vyděl nejmenším společným násobkem“.

Je to oblast intersubjektivní reality oboru, takže v ní lze řešit rozpory mezi individuálními představami (přesvědčením) – např. rozdíl ve výpočtu – tím, že se lze odvolat na objektivní zákonitosti, které jsou v oboru platné a všeobecně uznávané a dokazatelné (znám-li dvě čísla z multiplikativní triády, třetí číslo umím vypočítat operací dělení nebo násobení).

Ve třetí vrstvě, tzv. *kompetenční*, se rozvíjí nad-oborové kompetence. V našem případě jde zcela příkladně o kompetence k řešení problémů, týmové spolupráci, diskusi třídního kolektivu, argumentaci, formulování hypotéz, kritickému posuzování myšlenek spolužáků, komunikační a té nejdůležitější, k učení.

Literatura

- Eco, U. (2005). *Dějiny krásy*. Praha: Argo.
- Fauconnier, G., & Turner, M. (2002). *The way we think. Conceptual blending and the mind's hidden complexities*. New York: Basic Books.
- Gruszczyk-Kolczyńska, E. (1992). *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki. Przyczyny, diagnoza, zajęcia dydaktyczno-worownawcze*. Warszawa: WSiP.
- Gruszczyk-Kolczyńska, E., & Zielinska, E. (2015). *Dzieci i matematyka – dwadzieścia lat później*. Kraków: CEBP.
- Hejny, M. (2004). Chyba jako prvek edukační strategie učitele. In M. Hejny, J. Novotná, & N. Stehliková, *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, 1. sv. (s. 33–80). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- Hejny, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- Kvasz, L. (2015). *Instrumentální realizmus*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni.
- Kvasz, L. (2016). Principy genetického konstruktivismu. *Orbis scholae*, 10(2), 15–45.
- Minsky, M. (1988). *The society of mind*. New York: Simon and Schuster.
- Semadeni, Z. (2002). Trojaka natura matematiky: idee glebokie, formy powierzchniowe, modele formalne. *Dydaktyka matematyki*, 24, 41–92.
- Semadeni, Z. (2007). Zjawisko zastępowania obiektów matematycznych przez inne obiekty o tej samej nazwie. *Didactica Mathematicae*, 30, 7–45.
- Sillamy, N. (2001). *Psychologický slovník*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.
- Slavík, J., Chrz, V., & Štech, S., et al. (2013). *Tvorba jako způsob poznávání*. Praha: Karolinum.
- Slavík, J., Janík, T., Najvar, P., & Knecht, P. (2017). *Transdisciplinární didaktika: o učitelském sdílení znalostí a zvyšování kvality výuky napříč obory*. Brno: Masarykova univerzita.
- Vygotskij, L. S. (1976). *Myšlení a řeč*. Praha: SPN.
- Wittmann, E. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics Education*, 48, 1–20. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1015538317850>

Bibliografický údaj

- Jirotková, D. (2017). Rytmus, pohyb, periodicitu, nejmenší společný násobek dvou přirozených čísel. In J. Slavík, J. Stará, K. Uličná, & P. Najvar, et al., *Didaktické kazuistiky v oborech školního vzdělávání* (s. 187–216). Brno: Masarykova univerzita.